Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Développements :

Décomposition de Dunford, Invariants de similitude.

Bibliographie :

Mansuy-Mneimné, Rombaldi, OA, Gourdon.

Rapport du jury :

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple le cas d'une matrice diagonalisable ou le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum. La décomposition de Frobenius trouve tout à fait sa place dans cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutant entre eux ou sur la théorie des représentations.

Intro :

Il s'agit de se différentier à tout prix des autres leçons de réduction. On montre d'abord l'utilité des sous-espaces stables dans la réduction d'endomorphismes, puis on se met à rechercher des sous espaces stables ; enfin on s'intéresse aux sous espaces stables d'une famille d'endomorphismes, notamment pour les représentations (c'est une dernière partie sur laquelle il faut insister car elle n'est présente dans aucune autre leçon de réduction)

Étant donné un endomorphisme u, l'objectif général de la réduction est de décomposer l'espace en sous-espaces stables sur lesquels u induit un endomorphisme plus simple.

Plus d'applciations des résultats purement théoriques sur la réduction. Noter la pertinence de la notion de sous-représentations dans cette leçon.

La notion de sous-espace stable est à la base de la théorie de la réduction des endomorphismes.

Dans l'idéal, il faut partir de la problématique : les sous-espaces stables quels sont-ils ? Comment les trouver tous ? Quels sont les endomorphismes dont l'ensemble des sous-espaces stables vérifie telle propriétés ?...

En général, un sous-espace stable n'admet pas de sous-espace supplémentaire stable (prendre une matrice nilpotente d'indice 2 sur le plan et considé- rer sa droite propre). Toutefois, on sait décomposer l'espace en sous-espaces particuliers (lemme des noyaux, décomposition de Frobenius).

L'intérêt des sous-espaces stables est de fournir des théorèmes de réduction (souvent grâce à un raisonnement par récurrence sur la dimension).

Remarque 1. *Plan de Beaulieu 2016.*

Remarque 2. *Cadre : K corps, E un K-espace vectoriel de dimension n, $f \in L(E)$.*

1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

1.1 Sous-espaces stables

Définition 3 (Mansuy p15)**.** *Sous-espace vectoriel stable.*

Exemple 4. $\{0\}, E$ *sont stables par* f.

Exemple 5 (Mansuy p15)**.** *[OA p158] $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont stables par f. Les sous-espaces propres sont stables par u.*

Proposition 6 (Mansuy p15)**.** *Si F est stable par f et g, alors il est stable par $f+g$ et $f \circ g$.*

Proposition 7 (Mansuy p15)**.** *Si F est stable par f et si $g \in GL(E)$, alors $g(F)$ est stable par $g \circ f \circ g^{-1}$.*

Exemple 8 (Mansuy p15)**.** *Rotations.*

1.2 Endomorphisme induit et bases adaptées

Définition 9 (Mansuy p16)**.** *Endomorphisme induit.*

Proposition 10 (OA p158)**.** *Matrice d'un endomorphisme admettant un sous-espace stable.*

Proposition 11 (Mansuy p15)**.** *Forme de la matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à une décomposition en sous-espaces stables.*

Remarque 12 (OA p159)**.** *Réciproquement, si u admet une matrice triangulaire par blocs, alors on en déduit un sous-espace stable.*

Remarque 13. *En écrivant E comme une somme directe de sev stables par f, l'étude de f se ramène à l'étude des restrictions de f à chacun des sev stables.*

Réduire un endomorphisme, c'est trouver une base adaptée aux espaces stables.

Exemple 14. *Pour p un projecteur, on a $E = Ker(p) \oplus Im(P)$ avec $p_{|Ker(p)} = 0$ et $p_{|Im(p)} = Id_{Im(p)}$.*

Exemple 15. *Pour $car(K) \neq 2$ et s une involution, on a $E = Ker(s+Id) \oplus Ker(s-Id)$ avec $s_{|Ker(s+Id)} = -Id_{Ker(s+Id)}$ et $s_{|Ker(s-Id)} = Id_{Ker(s-Id)}$.*

Proposition 16 (Mansuy p16)**.** *Le polynôme minimal/caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de f.*

Proposition 17 (Mansuy p16)**.** *Si $E = F \oplus G$ où F, G sont stables par f, alors $\pi_f = ppcm(\pi_{f_F}, \pi_{f_G})$.*

Proposition 18 (OA)**.** *χ_f est irréductible sur K si et seulement si f n'admet aucun sous-espace stable non trivial.*

1.3 Exemples de sous-espaces stables

Proposition 19 (OA p158)**.** *Si $K = \mathbb{C}$, alors u admet une droite stable. Si $K = \mathbb{R}$, alors u admet une droite ou un plan stable.*

Exemple 20. *Pour p un projecteur sur F parallèlement à V, F et V sont stables par p.*

Pour r une rotation de $\mathbb{R}^2$, r ne laisse aucune droite vectorielle stable.

Exemple 21 (Mansuy p16)**.** *Un sous-espace est stable par un projecteur p si et seulement si il est la somme directe d'une sous-espace $Im(p)$ et d'un sous-espace de $ker(p)$.*

Exemple 22 (Mansuy p17)**.** *De même avec les symétries.*

Exemple 23 (Mansuy p16)**.** *Tous les sous-espaces sont stables par une homothétie.*

Proposition 24 (FGN p269)**.** *f laisse stable tous les sev de dimension k, pour un certain $k \in \{1, .., n\}$ fixé, si et seulement si f est une homothétie.*

Exemple 25 (Mansuy p22)**.** *Sous-espaces stables par $M \mapsto Tr(AM)I_n$.*

Exemple 26 (Mansuy p17)**.** *Les sous-espaces stables par un nilpotent maximal sont les noyaux itérés.*

Définition 27 (Mansuy p17)**.** *Sous-espace cyclique.*

Proposition 28 (Mansuy p18)**.** *Le sous-espace cyclique de f associé à x est le sous-espace engendré par $(f^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$, de dimension le degré du polynôme minimal de f en x.*

1.4 Utilisation des polynômes d'endomorphismes : lemme des noyaux

Proposition 29 (Mansuy p26)**.** *Si deux endomorphismes commutent, ils stabilisent leurs images et noyaux respectifs.*

Proposition 30 (Mansuy p26)**.** *Les seuls endomorphismes qui commutent avec tout le monde sont les homothéties.*

Exemple 31 (Mansuy p30)**.** *Un endomorphisme commute avec le projecteur p si et seulement si il stabilise $ker(p - id)$ et $ker(p)$.*

Théorème 32 (OA p163)**.** *[Romb p599][Mansuy p38] Lemme des noyaux.*

Remarque 33. *Si P est annulateur, chaque $ker(P_i(u)$ est stable par u et u est diagonale par blocs.*

Application 34 (OA p165)**.** *Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{f,x} = \pi_f$.*

Application 35 (FGN p152)**.** *Ap de l'ap. Un endomorphisme a un nombre fini de sous-espace stables si et seulement si son polynôme minimal est de degré maximal.*

Application 36 (OA p164)**.** *Si F est stable par u alors $F = \oplus(F \cup ker(P_i(u))$.*

1.5 Supplémentaires stables et dualité

Définition 37 (Gourdon p129)**.** *[Romb p448,453] $F^\perp$ et application transposée.*

Proposition 38 (Gourdon p130)**.** *F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^t.*

Proposition 39 (Gourdon)**.** *$dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E)$.*

Remarque 40 (Gourdon p130)**.** *Trouver un vecteur propre de f^t, c'est comme trouver un hyperplan stable par f.*

On peut ainsi chercher les hyperplans stables de l'endomorphisme f en cherchant les droites stables de f^t.

Exemple 41 (Madère...)**.** *[Delaunay p150] Sous-espaces stables de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

2 Sous-espaces associés à un endomorphisme

2.1 Sous-espaces propres

Définition 42. *Sous-espace propre.*

Exemple 43 (Escofier p299).

Proposition 44. *Les sous-espaces propres sont en somme directe.*

Définition 45 (FGN). *On appelle drapeau complet de E une suite $\{0\} = F_0 \subset .. \subset F_n = E$ de sous-espaces de E tels que pour tout k, $dim(F_k) = k$.*

Proposition 46. *f est trigonalisable si et seulement s'il existe un drapeau complet formé de sous-espaces stables par f.*

Proposition 47. *f est diagonalisable si et seulement s'il stabilise n droites vectorielles,*

Application 48 (Romb p600). *u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples si et seulement si le polynôme minimal est scindé à racines simples.*

Application 49 (Romb p600). *u est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur scindé si et seulement si le polynôme minimal est scindé.*

Application 50 (OA p166). *L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable/trigonalisable sur un sev stable est encore diagonalisable/trigonalisable.*

Proposition 51. *Si u est diagonalisable et $E = \bigoplus E_i$ (E_i espaces propres), F est stable si et seulement si pour tout i, il existe $F_i \subset E_i$ tel que $F = \bigoplus E_i$.*

2.2 Sous-espaces caractéristiques

Définition 52 (Gourdon p191). *[Romb p601] Sous-espaces caractéristiques.*

Proposition 53 (Gourdon p192). *[Romb p602] E est somme directe des N_i, ils sont stables par u et de dimension la multiplicité de λ_i comme racine du polynôme caractéristique.*

Proposition 54 (OA). *Les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques sont des sous-espaces stables.*

Remarque 55. *Un sous-espace est stable si et seulement si c'est la somme directe de ses intersections avec les sous-espaces caractéristiques, et ceux-ci sont stables. (?)*

Proposition 56. *Si χ_f est scindé, alors E est somme directe de sous-espaces caractéristiques, et la matrice de f dans une base adaptée est de la forme $diag(M_1, .., M_k)$ où M_j est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont tous égaux à λ_j .*

Exemple 57 (Grifone).

Proposition 58 (Romb p603). *Décomposition de Dunford.*

Application 59. *Calcul d'exponentielles : $exp(f) = exp(d)exp(n)$.*

Application 60 (Romb). *f est diagonalisable si et seulement si $\exp(f)$ l'est.*

3 Familles d'endomorphismes

3.1 Réduction simultanée

Définition 61 (Mansuy p84). *[Romb p676] Co-diagonalisabilité (resp. co-trigonalisabilité).*

Proposition 62 (Mansuy p84). *[Romb p677] Une famille d'endomorphisme est codiagonalisable si et seulement si les endomorphismes commutent deux à deux et sont diagonalisables. (resp trigo)*

Application 63. *Un sous-groupe abélien G de $GL_n(\mathbb{C})$ est codiagonalisable.*

Application 64 (OA p206). *Un sous-groupe abélien G de matrices diagonalisables de $Gl_n(K)$ est semblable à un sous-groupe de matrices diagonales.*

Application 65 (OA p204). *Les sous-groupes finis de GL_n sont conjugués à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.*

Application 66 (OA). *Soit K tel que $car(K) \neq 2$. Alors $Gl_n(K) \simeq Gl_m(K)$ si et seulement si $m = n$.*

Application 67 (Romb p690). *[Mansuy p85] Si $A, B \in M_n(K)$ sont diagonalisables, alors $M \mapsto AM + MB$ est diagonalisable. (ou $M \mapsto AMB$.)*

Application 68 (OA p168). *Si f et g commutent et sont diagonalisables alors leur somme est diagonalisable.*

Contre exemple 69.

Remarque 70. *Ne pas oublier le parallèle avec trigonalisable.*

Proposition 71. *Soit u un endomorphisme ayant n valeurs propres distintes et v tel que u et v commutent. Alors toute base de diagonalisation de u diagonalise v.*

Application 72 (FGN algèbre 2 p159). *Les solutions de $X^2 = \begin{pmatrix} 9 & 91 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$ sont $\{P \begin{pmatrix} \pm 3 & 0 \\ 0 & \pm 10 \end{pmatrix} P^{-1}\}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*

3.2 Représentations

Définition 73 (Romb p179). *Représentation linéaire.*

Exemple 74. *Représentation régulière, triviale, groupe diédral.*

Définition 75 (Romb p182). *Sous-représentation.*

Exemple 76 (Romb p182). *$\{0\}$ et E.*

Définition 77 (Romb p82). *Représentation irréductible.*

Exemple 78. *$\rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité (G groupe fini).*

Exemple 79. *Si G est abélien, les seules représentations irréductibles sont celles de degré 1.*

Exemple 80. $e_1 + \overset{\rightharpoonup}{\ldots} + e_n$.

Théorème 81 (Romb p186)**.** *Théorème de Maschke.*

Définition 82. *Si (ρ_1, V_1),(ρ_2, V_2) sont deux représentations de G, on appelle morphisme de représentations toute application linéaire $f \in L(V_1, V_2)$ telle que pour tout $g \in G$, $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$. Si f est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on dit que les représentations sont isomorphes.*

Théorème 83. *Lemme de Schur.*
Soient $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ deux représentations irréductibles de G, soit $f : V_1 \to V_2$ un morphisme de représentations. Alors, soit $f = 0$, soit c'est un isomorphisme. En identifiant V_1 et V_2 par f, on a alors $\rho_1 = \rho_2$et il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = \lambda Id_V$.

4 Endomorphismes particuliers

4.1 Endomorphismes normaux

Remarque 84. *On se place sur un espace euclidien ou hermitien.*

Définition 85 (Romb p702)**.** *Adjoint d'un endomorphisme.*

Exemple 86. *Pour un projecteur, $p^* = p$.*

Définition 87 (Gourdon p258)**.** *[Romb p728] Endomorphisme normal.*

Exemple 88 (Romb p729)**.** *Endomorphismes symétriques, antisymétriques, orthogonaux.*

Lemme 89 (Gourdon p258 ?)**.** *F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.*

Remarque 90 (Romb p728)**.** *Si u est normal et F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.*

Proposition 91 (Romb p729)**.** *Pour tout $u \in L(E)$, il existe un sous-espace de dimension 1 ou 2 stable par u.*

Proposition 92. *Soit f endomorphisme normal et E_λ un sous-espace propre de f. Alors $E_\lambda^\perp$ stable par f et f^*. (Redondant ? Vérifier les preuves. $\neq$ dans Gourdon et Rombaldi ?. Rombaldi peut-être plus approprié ici...)*

Proposition 93 (Romb p730)**.** *Si u est normal, E est somme directe de sev de dimension 1 ou 2 stables par u et deux à deux orthogonaux.*

Théorème 94 (Gourdon p260)**.** *[Romb p732] Réduction des endomorphismes normaux.*

Application 95 (Romb p732)**.** *Réduction des matrices symétriques, antisymétriques et orthogonales.*

Application 96. *Existence et unicité de la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive. Décomposition polaire*

Application 97. *Les matrices antisymétriques réelles, orthogonales sont diagonalisables sur C.*

Application 98 (FGN al3 p65)**.** *$exp : A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.*

Application 99 (Seguin p196)**.** *u est normal si et seulement si $u^* \in \mathbb{R}[u]$. (?)*

Application 100. *Connexité de $SO_n(\mathbb{R})$*

4.2 Endomorphismes cycliques

Remarque 101. *On a vu que si u laisse stable toute droite, alors u est scalaire. Voici la situation inverse, où u stabilise un minimum de sous-espaces : on est à l'opposé des homothéties pour la décomposition de Frobenius.*

Définition 102 (Gourdon, H2G2, Mansuy)**.** *Endomorphisme cyclique.*

Exemple 103. *Si $n = 2$ et f n'est pas une homothétie, alors f est cyclique.*

Proposition 104. *Caractérisation avec $\chi_u = \pi_u$ et avec la matrice compagnon.*

Théorème 105 (Mansuy p124)**.** *Invariants de similitude.*

Application 106 (Mansuy p127)**.** *Réduction de Frobenius.*

Application 107. *Deux endomorphismes sont semblables si et seulement si ils ont mêmes invariants de similitude.*

Application 108. *Réduction de Jordan.*

Remarque 109. *Les invariants de similitude se calculent avec l'algorithme de Smith.*

Exemple 110 (OA, Mansuy)**.** *Invariants de similitude pour le polynôme caractéristique X^4.*